Proceedings of IAM, V.8, N.2, 2019, pp.121-135

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ МИНИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Садыгов М.А.

Институт Прикладной Математики БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: misreddin08@rambler.ru

Резюме. В работе получены необходимые и достаточные условия минимума для дифференциальных включений с переменной структурой.

Ключевые слова: необходимое условие, липшицевая функция, субдифференциал, включение.

AMS Subject Classification: 05C35, 52A20.

1. Введение.

В работе единая методика применяется к экстремальным задачам для дифференциальных включений (см.[5]-[7]). Схема получения необходимых условий состоит из нескольких этапов. Сначала изучается непрерывная зависимость решения дифференциального включения от возмущения. Затем исследуется выпуклая вариационная задача, заданная в соответствующем пространстве. Хотя выпуклые вариационные задачи изучены разными авторами (см. [10]), но такие задачи не применимы к выпуклым экстремальным задачам для включений. Далее рассматривается выпуклая экстремальная задача для включений. Затем, используя теоремы о непрерывной зависимости решения включений от возмущения, невыпуклая экстремальная задача для включений приведена к вариационной задаче и получено необходимое условие экстремума.

Работа является обобщением некоторых результатов работы автора в ([5], с.82-106, [6],с.263-344), где получены необходимые и достаточные условия минимума для экстремальной задачи дифференциальных включений. В работе [8] получено необходимое и достаточное условие экстремума для обобщенной задачи Больца с переменной структурой. Данная работа является продолжением работы [8].

2.Выпуклая экстремальная задача для дифференциальных включений.

Символом $W^n_{p,1}[t_0,t_1]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных функций из $[t_0,t_1]$ в R^n, первая производная которых принадлежит $L^n_p[t_0,t_1]$, а символом $W^m_{p,1}[t_2,T]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных функций из $[t_2,T]$ в

R^m, первая производная которых принадлежит $L_p^m[t_2, T]$, где через R^s обозначено конечномерное пространство (см. [3]).

Пусть $A: R^n \to R^m$ линейный оператор, т.е. $A - m \times n$ матрица и $\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Положим

$$W = \{(x, y) \in W_{1,1}^n[t_0, t_1] \times W_{1,1}^m[t_2, T] : y(t_2) = Ax(t_1)\},$$

с нормой $\|(x(\cdot), y(\cdot))\| = |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}(t)| dt + |Ax(t_1)| + \int_{t_2}^{T} |\dot{y}(t)| dt$, где $0 \le t_0 < t_1 \le t_2 < T$.

Ясно, что пара $(x, y) \in W$ однозначно определяется вектором $(x(t_0), \dot{x}(\cdot), Ax(t_1), \dot{y}(\cdot))$. Определим оператор $S: R^n \times L_1^n[t_0, t_1] \to R^m$ в следующем виде $S(c, z(\cdot)) = A(c + \int_{t_0}^{t_1} z(t) dt)$, где $c \in R^n$, $z(\cdot) \in L_1^n[t_0, t_1]$. Тогда имеем

$$\{(c, z_1(\cdot), S(c, z_1(\cdot)), z_2(\cdot)) : c \in R^n,\ z_1(\cdot) \in L_1^n[t_0, t_1],\ z_2(\cdot) \in L_1^m[t_2, T]\}$$

является подпространством в $R^n \times L_1^n[t_0, t_1] \times R^m \times L_1^m[t_2, T]$. Поэтому, используя теорему Хана-Банаха имеем, что каждый линейный непрерывный функционал w^* в W имеет вид

$$\left\langle w^*, (\overline{x}, \overline{y}) \right\rangle = (x(t_0)|a) + \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|\upsilon(t)) dt + (Ax(t_1)|b) + \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|u(t)) dt = (x(t_0)|a) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|\upsilon(t)) dt + (A(x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) dt)|b) + \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|u(t)) dt = (x(t_0)|a + A^* b) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|\upsilon(t) + A^* b) dt + \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|u(t)) dt,$$

где $a \in R^n$, $\upsilon(\cdot) \in L_\infty^n[t_0, t_1]$, $b \in R^m$, $u(\cdot) \in L_\infty^m[t_2, T]$. Функционал w^* обозначается символом (a, υ, b, u).

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функциями понимаются как почти всюду.

Пусть $a: [t_0, t_1] \times R^n \to \mathrm{comp}(R^n) \bigcup \{\varnothing\}$, $b: [t_2, T] \times R^m \to \mathrm{comp}(R^m) \bigcup \{\varnothing\}$ многозначные отображения, где $\mathrm{comp}(R^s)$ множество всех непустых компактных подмножеств R^s, $M \subset R^n$, $f: [t_0, t_1] \times R^n \to R_{+\infty} = R \bigcup \{+\infty\}$ и $g: [t_2, T] \times R^m \to R_{+\infty}$ нормальные интегранты, $\varphi: R^n \times R^n \times R^m \to R_{+\infty}$, $A - m \times n$ матрица.

Рассмотрим минимизацию функционала

$$J(x,y)=\varphi(x(t_0),x(t_1),y(T))+\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t))dt+\int_{t_2}^{T} g(t,y(t))dt \qquad (1)$$

при решениях $(x,y)\in W$ задачи

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)) \quad \text{при} \quad t\in[t_0,t_1], \qquad x(t_0)\in M,$$
$$\dot{y}(t)\in b(t,y(t)) \quad \text{при} \quad t\in[t_2,T]. \qquad (2)$$

Положим

$$\delta_M(x)=\begin{cases}0, & x\in M,\\ +\infty, & x\notin M,\end{cases} \qquad \omega_1(t,x,z)=\begin{cases}0, & z\in a(t,x),\\ +\infty, & z\notin a(t,x),\end{cases}$$

$$\omega_2(t,y,\nu)=\begin{cases}0, & \nu\in b(t,y),\\ +\infty, & \nu\notin b(t,y).\end{cases}$$

Рассмотрим минимизацию функционала

$$\Phi_0(x,y)=\varphi(x(t_0),x(t_1),y(T))+\delta_M(x(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}(f(t,x(t))+\omega_1(t,x(t),\dot{x}(t)))dt+$$
$$+\int_{t_2}^{T}(g(t,y(t))+\omega_2(t,y(t),\dot{y}(t)))dt \qquad (3)$$

в пространстве W.

Рассмотрим возмущенный функционал

$$\Phi(x,y;z,\omega)=\varphi(x(t_0),x(t_1),y(T))+\delta_M(x(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}(f(t,x(t))+$$
$$+\omega_1(t,x(t),\dot{x}(t)+z(t)))dt+\int_{t_2}^{T}(g(t,y(t))+\omega_2(t,y(t),\dot{y}(t)+\omega(t)))dt,$$

где $z(\cdot)\in L_1^n[t_0,t_1]$, $\omega(\cdot)\in L_1^m[t_2,T]$. Ясно, что $\Phi(x,y;0,0)=\Phi_0(x,y)$.

Пусть $M\subset R^n$ выпуклое множество, $f:[t_0,t_1]\times R^n\to R_{+\infty}$ и $g:[t_2,T]\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $\varphi:R^n\times R^n\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, $\operatorname{gr} a_t=\{(x,z):z\in a(t,x)\}$ и $\operatorname{gr} b_t=\{(y,\nu):\nu\in b(t,y)\}$ выпуклые множества. Положим $h(z,\omega)=\inf_{(x,y)\in W}\Phi(x,y,z,\omega)$. Из предложения 2.5 [4] вытекает, что h выпуклая функция. Если h субдифференцируема в нуле, то задача (1),(2) называется стабильной. Положим $\|a(t,x)\|=\sup\{|y|:y\in a(t,x)\}$, $\|\varnothing\|=0$.

Лемма 1. Если отображение $t\to a(t,x)$ измерима на $[t_0,t_1]$, отображение $t\to b(t,y)$ измеримо на $[t_2,T]$, $\operatorname{gr}a_t$ и $\operatorname{gr}b_s$ замкнуты и выпуклы почти при всех $t\in[t_0,t_1]$ и $s\in[t_2,T]$, существуют такие суммируемые функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(s)$, что $\|a(t,x)\|\le\lambda_1(t)(1+|x|)$ при $t\in[t_0,t_1]$, $x\in R^n$, $\|b(s,y)\|\le\lambda_2(s)(1+|y|)$ при $s\in[t_2,T]$, $y\in R^m$ и при некотором $x_0(t_0)=x_0\in M$ существует решение $x_0(t)$ задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))$, $x(t_0)=x_0$ которое принадлежит $\operatorname{dom} a_t=\{x: a(t,x)\neq\varnothing\}$ вместе с некоторой ε трубкой, т.е. $\{x:|x_0(t)-x|\le\varepsilon\}\subset\operatorname{dom} a_t$ при $t\in[t_0,t_1]$ и существует решение $y_0(t)$ задачи $\dot{y}(t)\in b(t,y(t))$, $y(t_2)=Ax_0(t_1)$ которое принадлежит $\operatorname{dom} b_t=\{y: b(t,y)\neq\varnothing\}$ вместе с ε трубкой, т.е. $\{y:|y_0(t)-y|\le\varepsilon\}\subset\operatorname{dom} b_t$ при $t\in[t_2,T]$, где $\varepsilon>0$, $f:[t_0,t_1]\times R^n\to R_{+\infty}$, $g:[t_2,T]\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, функционал $J_f(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t))dt$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)\in W^n_{1,1}[t_0,t_1]$, $J_g(y(\cdot))=\int_{t_2}^{T} g(t,y(t))dt$ непрерывен в точке $y_0(\cdot)\in W^m_{1,1}[t_2,T]$, φ выпуклая функция и $\varphi(x(t_0),\cdot)$ непрерывна в точке $(x_0(t_1),y_0(T))$, $M\subset R^n$ выпуклое множество, $A-m\times n$ матрица, $\inf\limits_{(x,y)\in W}\Phi_0(x,y)$ конечен, то задача (3) стабильна.

Доказательство. Из непрерывности и выпуклости $J_f(x)$ в точке $x_0(\cdot)\in W^n_{1,1}[t_0,t_1]$ следует, что существуют такие $\alpha_1>0$ и M_1, что $J_f(x)\le M_1$ при $\|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W^n_{1,1}}<\alpha_1$. Из непрерывности и выпуклости $J_g(y)$ в точке $y_0(\cdot)\in W^m_{1,1}[t_2,T]$ получим, что существуют такие $\alpha_2>0$ и M_2, что $J_g(y)\le M_2$ при $\|y(\cdot)-y_0(\cdot)\|_{W^m_{1,1}}<\alpha_2$. Аналогично, существуют такие $\alpha_3>0$ и M_3, что $\varphi(x_0(t_0),b_1,b_2)\le M_3$ при $|(b_1,b_2)-(x_0(t_1),y_0(T))|<\alpha_3$. Обозначим $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\varepsilon\}$. По лемме 9.1[5] для $\alpha>0$ существуют $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$ такие, что при $z(\cdot)\in L^n_1[t_0,t_1]$, $\|z(\cdot)\|_{L^n_1}\le\delta_1$ и $\omega(\cdot)\in L^m_1[t_2,T]$, $\|\omega(\cdot)\|_{L^m_1}\le\delta_2$ существуют такое решение x_z задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))-z(t)$, $x(t_0)=x_0$ и такое решение y_ω задачи $\dot{y}(t)\in b(t,y(t))-\omega(t)$, $y(t_2)=Ax_z(t_1)$, что $\|x_z(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W^n_{1,1}}<\alpha$ и $\|y_\omega(\cdot)-y_0(\cdot)\|_{W^m_{1,1}}<\alpha$. Поэтому получим, что

$$h(z,\omega)=\inf_{(x,y)\in W}\Phi(x,y,z,\omega)\le\Phi(x_z,y_\omega,z,\omega)\le M_1+M_2$$

при $z(\cdot)\in L^n_1[t_0,t_1]$, $\omega(\cdot)\in L^m_1[t_2,T]$, $\|z(\cdot)\|_{L^n_1}<\delta$, $\|\omega(\cdot)\|_{L^m_1}<\delta$, где $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Согласно предложению 1.2.5 [10], отсюда следует, что функция h непрерывна в нуле. Тогда из предложения 1.5.2 [10] вытекает, что функция h субдифференцируема в нуле. Лемма доказана.

Обозначим $\bar f(t,x,z)=f(t,x)+\omega_1(t,x,z)$, $\bar g(t,y,\nu)=g(t,y)+\omega_2(t,y,\nu)$ и если $\upsilon\in R^n$, $u\in R^m$, то положим $\bar f^0(t,x,\upsilon)=\inf\limits_{z\in R^n}\{(z|\upsilon)+\bar f(t,x,z)\}$, $\bar g^0(t,y,u)=\inf\limits_{\nu\in R^m}\{(\nu|u)+\bar g(t,y,\nu)\}$, $\omega_1^0(t,x,\upsilon)=\inf\limits_{z\in R^n}\{(z|\upsilon)+\omega_1(t,x,z)\}$, $\omega_2^0(t,y,u)=\inf\limits_{\nu\in R^m}\{(\nu|u)+\omega_2(t,y,\nu)\}$.

Ясно, что

$$\bar f^0(t,x,\upsilon)=\inf_{z\in R^n}\{(z|\upsilon)+f(t,x)+\omega_1(t,x,z)\}=$$
$$=f(t,x)+\inf_{z\in R^n}\{(z|\upsilon)+\omega_1(t,x,z)\}=f(t,x)+\omega_1^0(t,x,\upsilon),$$
$$\bar g^0(t,y,u)=\inf_{\nu\in R^m}\{(\nu|u)+g(t,y)+\omega_2(t,y,\nu)\}=$$
$$=g(t,y)+\inf_{\nu\in R^m}\{(\nu|u)+\omega_2(t,y,\nu)\}=g(t,y)+\omega_2^0(t,y,u).$$

Теорема 1. Пусть $f:[t_0,t_1]\times R^n\to R_{+\infty}$ и $g:[t_2,T]\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $\varphi:R^n\times R^n\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, $A-m\times n$ матрица, отображение $t\to a(t,x)$ измеримо на $[t_0,t_1]$, отображение $t\to b(t,y)$ измеримо на $[t_2,T]$, множества gra_t и grb_s выпуклые почти при всех $t\in[t_0,t_1]$ и $s\in[t_2,T]$, M-выпуклое множество. Для того, чтобы функция $(\bar x(\cdot),\bar y(\cdot))\in W$ среди всех функций $(x(\cdot),y(\cdot))\in W$ минимизировала функционал (3) достаточно, чтобы нашлись функции $\bar\upsilon(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1]$ и $\bar u(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T]$ такие, что

1) $-\dot{\bar\upsilon}(t)\in\partial(f(t,\bar x(t))+\omega_1^0(t,\bar x(t),\bar\upsilon(t)))$ при $t\in[t_0,t_1]$,

2) $\omega_1^0(t,\bar x(t),\bar\upsilon(t))=(\dot{\bar x}(t)|\bar\upsilon(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$,

3) $-\dot{\bar u}(t)\in\partial(g(t,\bar y(t))+\omega_2^0(t,\bar y(t),\bar u(t)))$ при $t\in[t_2,T]$,

4) $\omega_2^0(t,\bar y(t),\bar u(t))=(\dot{\bar y}(t)|\bar u(t))$ при $t\in[t_2,T]$,

5) $(-\bar\upsilon(t_0),\ \bar\upsilon(t_1)-A^*\bar u(t_2),\ \bar u(T))\in\partial(\varphi(\bar x(t_0),\bar x(t_1),\bar y(T))+\delta_M(\bar x(t_0)))$,

а если выполнены условия леммы 1 при $(x_0(t),y_0(s))=(\bar x(t),\bar y(s))$, то условия 1)-5) являются необходимыми.

Доказательство. Достаточность теоремы непосредственно проверяется.

Необходимость. Из леммы 1 вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [10] вытекает, что решения $(\bar x(\cdot),\bar y(\cdot))\in W$ задачи $\inf\{\Phi_0(x,y):(x,y)\in W\}$ и решения $-(\bar\upsilon(\cdot),\bar u(\cdot))$ задачи $\sup\limits_{(\upsilon,u)\in L_\infty^n[t_0,t_1]\times L_\infty^m[t_2,T]}\{-\Phi^*(0,0,\upsilon,u)\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\bar{x},\bar{y},0,0)+\Phi^*(0,0,-\bar{\upsilon},-\bar{u})=0. \qquad (4)$$

Обозначив $\bar{\varphi}(x_0,x_1,y)=\varphi(x_0,x_1,y)+\delta_M(x_0)$, имеем

$$\Phi^*(0,0,-\bar{\upsilon},-\bar{u})=\sup_{\substack{(x,y)\in W\\(z,\omega)\in L_1^n[t_0,t_1]\times L_1^m[t_2,T]}}\{-\int_{t_0}^{t_1}(z(t)|\bar{\upsilon}(t))dt-\int_{t_2}^{T}(\omega(t)|\bar{u}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}\bar{f}(t,x(t),\dot{x}(t)+z(t))dt-$$

$$-\int_{t_2}^{T}\bar{g}(t,y(t),\dot{y}(t)+\omega(t))dt-\bar{\varphi}(x(t_0),x(t_1),y(T))\}=$$

$$=\sup_{\substack{(x,y)\in W\\(z,\omega)\in L_1^n[t_0,t_1]\times L_1^m[t_2,T]}}\{-\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)+z(t)|\bar{\upsilon}(t))dt+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\bar{\upsilon}(t))dt-\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)+\omega(t)|\bar{u}(t))dt+$$

$$+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|\bar{u}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}\bar{f}(t,x(t),\dot{x}(t)+z(t))dt-\int_{t_2}^{T}\bar{g}(t,y(t),\dot{y}(t)+\omega(t))dt- \qquad (5)$$

$$-\bar{\varphi}(x(t_0),x(t_1),y(T))\}=\sup_{(x,y)\in W}\{\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\bar{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|\bar{u}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}\bar{f}^0(t,x(t),\bar{\upsilon}(t))dt-$$

$$-\int_{t_2}^{T}\bar{g}^0(t,y(t),\bar{u}(t))dt-\bar{\varphi}(x(t_0),x(t_1),y(T))\}.$$

Обозначим $J_1(x,y)=\int_{t_0}^{t_1}\bar{f}^0(t,x(t),\bar{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\bar{g}^0(t,y(t),\bar{u}(t))dt,$

$J_2(x,y)=\bar{\varphi}(x(t_0),x(t_1),y(T))$.

Из (4), (5) вытекает, что $J_1(x,y)$ и $J_2(x,y)$ собственные функционалы. Так как $\omega_1^0(t,\bar{x}(t)+x,\bar{\upsilon}(t))=\inf_{z\in a(t,\bar{x}(t)+x)}(\bar{\upsilon}(t)|z)\le(\bar{\upsilon}(t)|z(t))$, где $z(t)\in a(t,\bar{x}(t)+x)$ измеримая функция и $|z(t)|\le\lambda_1(t)(1+|\bar{x}(t)+x|)$, то $\omega_1^0(t,\bar{x}(t)+x,\bar{\upsilon}(t))$ суммируема при $x\in R^n$, $|x|<\varepsilon$. Аналогично имеем, что $\omega_2^0(t,\bar{y}(t)+\tilde{z},\bar{u}(t))$ суммируема при $\tilde{z}\in R^m$, $|\tilde{z}|<\varepsilon$. Поэтому, по условию существует число $r>0$ такое, что функции $\bar{f}^0(t,\bar{x}(t)+x,\bar{\upsilon}(t))=f(t,\bar{x}(t)+x)+\omega_1^0(t,\bar{x}(t)+x,\bar{\upsilon}(t))$, $\bar{g}^0(t,\bar{y}(t)+\tilde{z},\bar{u}(t))=$ $=g(t,\bar{y}(t)+\tilde{z})+\omega_2^0(t,\bar{y}(t)+\tilde{z},\bar{u}(t))$ суммируемы при $x\in R^n$, $|x|<r$ и $\tilde{z}\in R^m$, $|\tilde{z}|<r$. Отсюда следует, что при условии теоремы 1 функционал J_1 непрерывен в точке $(\bar{x}(\cdot),\bar{y}(\cdot))$ в W, а $J_2(\bar{x}(\cdot),\bar{y}(\cdot))$ конечен. По соотношению (4) имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\bar{f}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\bar{g}(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t))dt+\bar{\varphi}(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))+\Phi^*(0,0,-\bar{\upsilon},-\bar{u})=0.$$

Положив

$$S(x,y)=\int_{t_0}^{t_1}\overline{f}^{\,0}(t,x(t),\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\overline{g}^{0}(t,y(t),\overline{u}(t))dt+\overline{\varphi}(x(t_0),x(t_1),y(T))$$

из (5) имеем, что $\Phi^*(0,0,-\overline{\upsilon},-\overline{u})=S^*(\overline{w}^*)$, где $\overline{w}^*=(0,\overline{\upsilon},0,\overline{u})$. Так как

$$S^*(\overline{w}^*)\ge\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt-S(\overline{x},\overline{y}),$$

$$S(\overline{x},\overline{y})\le\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt+\Phi_0(\overline{x},\overline{y}),$$

то отсюда получим, что

$$S^*(\overline{w}^*)\ge\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt-S(\overline{x},\overline{y})\ge-\Phi_0(\overline{x},\overline{y}).$$

Поэтому из соотношения (4) вытекает, что

$$S^*(\overline{w}^*)=\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt-S(\overline{x},\overline{y}),$$

$$S(\overline{x},\overline{y})=\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt+\Phi_0(\overline{x},\overline{y}).$$

Из второго соотношения вытекает, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\overline{f}^{\,0}(t,\overline{x}(t),\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\overline{g}^{0}(t,\overline{y}(t),\overline{u}(t))dt+\overline{\varphi}(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1),\overline{y}(T))-\int_{t_0}^{t_1}\overline{f}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))dt-$$

$$-\int_{t_2}^{T}\overline{g}(t,\overline{y}(t),\dot{\overline{y}}(t))dt-\overline{\varphi}(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1),\overline{y}(T))=\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt.$$

Отсюда, используя неравенства Юнга-Фенхеля, получим

$$\overline{f}^{\,0}(t,\overline{x}(t),\overline{\upsilon}(t))-\overline{f}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))=(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))\quad\text{при}\quad t\in[t_0,t_1],$$

$$\overline{g}^{0}(t,\overline{y}(t),\overline{u}(t))-\overline{g}(t,\overline{y}(t),\dot{\overline{y}}(t))=(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))\quad\text{при}\quad t\in[t_2,T].$$

Поэтому $\omega_1^0(t,\overline{x}(t),\overline{\upsilon}(t))=(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$ и $\omega_2^0(t,\overline{y}(t),\overline{u}(t))=(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))$ при $t\in[t_2,T]$. Из равенства

$$S^*(\overline{w}^*)=\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt-S(\overline{x},\overline{y})$$

вытекает, что $(0,\overline{\upsilon},0,\overline{u})\in\partial S(\overline{x},\overline{y})$. Из теоремы Моро-Рокафеллара (см.[1], с. 231) имеем, что

$$\partial S(\overline{x},\overline{y})=\partial J_1(\overline{x},\overline{y})+\partial J_2(\overline{x},\overline{y}).$$

Поэтому существуют $(a_1,\upsilon_1,b_1,u_1)\in\partial J_1(\overline{x},\overline{y})$ и $(a_2,\upsilon_2,b_2,u_2)\in\partial J_2(\overline{x},\overline{y})$ такие, что $(0,\overline{\upsilon},0,\overline{u})=(a_1,\upsilon_1,b_1,u_1)+(a_2,\upsilon_2,b_2,u_2)$.

Так как $(a_1,\upsilon_1,b_1,u_1)\in\partial J_1(\overline{x},\overline{y})$, то из следствия 1[8] вытекает, что функционал $w_1^*=(a_1,\upsilon_1,b_1,u_1)\in W^*$ принадлежит $\partial J_1(\overline{x},\overline{y})$ тогда и только тогда, когда w_1^* "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\upsilon}_1(t) \in \partial \bar{f}^0(t, \bar{x}(t), \bar{\upsilon}(t))$ при $t \in [t_0, t_1]$ и $-\dot{u}_1(t) \in \partial \bar{g}^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))$ при $t \in [t_2, T]$. По определению функционал $w_1^* = (a_1, \upsilon_1, b_1, u_1) \in W^*$ "абсолютно непрерывен", если существуют функции $\upsilon_1^* \in L_1^n[t_0, t_1]$, $u_1^* \in L_1^m[t_2, T]$ такие, что

$$a_1 = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_1^*(s)\,ds + A^* \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - A^* b_1, \quad \upsilon_1(t) = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_1^*(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \upsilon_1^*(s)\,ds +$$

$$+ A^* \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - A^* b_1, \qquad u_1(t) = \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - \int_{t_2}^{t} u_1^*(s)\,ds.$$

Из следствия 2 [8] вытекает, что функционал $w_2^* = (a_2, \upsilon_2, b_2, u_2) \in W^*$ принадлежит $\partial J_2(\bar{x}, \bar{y})$ тогда и только тогда, когда существуют $d_1 \in R^n$ и $d_2 \in R^m$ такие, что $\upsilon_2(t) = d_1$ при $t \in [t_0, t_1]$, $u_2(t) = d_2$ при $t \in [t_2, T]$ и $(a_2 - d_1,\ d_1 + A^* b_2 - A^* d_2,\ d_2) \in \partial \bar{\varphi}(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \bar{y}(T))$. Из равенства $(0, \bar{\upsilon}, 0, \bar{u}) = (a_1, \upsilon_1, b_1, u_1) + (a_2, \upsilon_2, b_2, u_2)$ следует, что $0 = a_1 + a_2$, $\bar{\upsilon} = \upsilon_1 + \upsilon_2$, $0 = b_1 + b_2$ и $\bar{u} = u_1 + u_2$. Отсюда имеем, что $a_2 = -a_1$, $\upsilon_1(t) = \bar{\upsilon}(t) - d_1$ при $t \in [t_0, t_1]$, $b_2 = -b_1$ и $u_1(t) = \bar{u}(t) - d_2$ при $t \in [t_2, T]$. Тогда

$$-\dot{\bar{\upsilon}}(t) \in \partial \bar{f}^0(t, \bar{x}(t), \bar{\upsilon}(t)) = \partial(f(t, \bar{x}(t)) + \omega_1^0(t, \bar{x}(t), \bar{\upsilon}(t))),$$

$$-\dot{\bar{u}}(t) \in \partial \bar{g}^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) = \partial(g(t, \bar{y}(t)) + \omega_2^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))),$$

$$(-a_1 - d_1, d_1 - A^* b_1 - A^* d_2, d_2) \in \partial \bar{\varphi}(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \bar{y}(T)),$$

и

$$a_1 = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_1^*(s)\,ds + A^* \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - A^* b_1, \quad \bar{\upsilon}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_1^*(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \upsilon_1^*(s)\,ds +$$

$$+ A^* \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - A^* b_1 + d_1, \qquad \bar{u}(t) = \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - \int_{t_2}^{t} u_1^*(s)\,ds + d_2.$$

Отсюда вытекает, что $\upsilon_1^*(t) = -\dot{\bar{\upsilon}}(t)$ и $u_1^*(t) = -\dot{\bar{u}}(t)$. Поэтому

$$a_1 = -\int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{\upsilon}}(s)\,ds - A^* \int_{t_2}^{T} \dot{\bar{u}}(s)\,ds - A^* b_1, \quad \bar{\upsilon}(t) = -\int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{\upsilon}}(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} \dot{\bar{\upsilon}}(s)\,ds -$$

$$- A^* \int_{t_2}^{T} \dot{\bar{u}}(s)\,ds - A^* b_1 + d_1, \qquad \bar{u}(t) = -\int_{t_2}^{T} \dot{\bar{u}}(s)\,ds + \int_{t_2}^{t} \dot{\bar{u}}(s)\,ds + d_2$$

Отсюда имеем, что $a_1 = -\bar{\upsilon}(t_1) + \bar{\upsilon}(t_0) - A^*(\bar{u}(T) - \bar{u}(t_2)) - A^* b_1$,
$\bar{\upsilon}(t_1) = -A^*(\bar{u}(T) - \bar{u}(t_2)) - A^* b_1 + d_1$, $\bar{u}(T) = d_2$. Поэтому

$$a_1 = -\overline{\upsilon}(t_1) + \overline{\upsilon}(t_0) - A^*(\overline{u}(T) - \overline{u}(t_2)) - A^* b_1,$$
$$d_1 = \overline{\upsilon}(t_1) + A^*(\overline{u}(T) - \overline{u}(t_2)) + A^* b_1, \qquad \overline{u}(T) = d_2.$$

Тогда из соотношения $(-a_1 - d_1, d_1 - A^* b_1 - A^* d_2, d_2) \in \partial\overline{\varphi}(\overline{x}(t_0), \overline{x}(t_1), \overline{y}(T))$ следует, что

$(-\overline{\upsilon}(t_0),\ \overline{\upsilon}(t_1) - A^*\overline{u}(t_2),\ \overline{u}(T)) \in \partial\overline{\varphi}(\overline{x}(t_0), \overline{x}(t_1), \overline{y}(T))$. Теорема доказана.

3. Невыпуклая экстремальная задача для дифференциальных включений

Рассмотрим минимизацию функционала

$$J(x,y) = \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt + \int_{t_2}^{T} g(t, y(t))dt \tag{6}$$

при решениях $(x, y) \in W$ задачи

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) \in M \subset R^n,$$
$$\dot{y}(t) \in b(t, y(t)) \quad \text{при} \quad t \in [t_2, T]. \tag{7}$$

Требуется найти необходимые условия оптимальности решения задачи (6),(7). Пусть

$$\psi_1(t,x,z) = \inf_{\omega \in a(t,x)} |\omega - z|, \quad \psi_2(t,y,v) = \inf_{\tilde{\omega} \in b(t,y)} |\tilde{\omega} - v|, \quad q(x) = \inf_{y \in M} |y - x|.$$

Отметим, что (см. [5]) если $\rho_x(a(t,x), a(t,x_1)) \le k(t)|x - x_1|$ при x_1 и x, то $|\psi_1(t,x,z) - \psi_1(t,x_1,z_1)| \le k(t)|x - x_1| + |z - z_1|$ при $z, z_1 \in R^n$.

Рассмотрим задачу

$$\Phi_\nu(x,y) = \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt + \int_{t_2}^{T} g(t, y(t))dt +$$
$$+ \nu(q(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \psi_1(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \int_{t_2}^{T} \psi_2(t, y(t), \dot{y}(t))dt) \xrightarrow{(x,y)\in W} \min.$$

Решение задачи (6),(7) обозначим через $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$.

Лемма 2. Пусть M непустое замкнутое множество в R^n, функции $t \to f(t,x)$ и $s \to g(s,y)$ измеримы, существует число $\alpha > 0$ такое, что $a(t,x)$ в области $t \in [t_0, t_1]$, $|x - \overline{x}(t)| \le \alpha$ непустое компактное множество, $a(t,x)$ измеримо по t, $b(s,y)$ в области $s \in [t_2, T]$, $|y - \overline{y}(s)| \le \alpha$ непустое компактное множество, $b(s,y)$ измеримо по s, существуют суммируемые функции $k_1(t)$, $k_2(s)$, $k_3(t)$, $k_4(s)$ и число $k_0 > 0$ такие, что

$$\rho_x(a(t,x), a(t,x_1)) \le k_1(t)|x - x_1|, \qquad \rho_x(b(s,y), b(s,y_1)) \le k_2(s)|y - y_1|,$$
$$|f(t,x) - f(t,x_1)| \le k_3(t)|x - x_1|, \qquad |g(s,y) - g(s,y_1)| \le k_4(s)|y - y_1|,$$
$$|\varphi(z_1, z_2, z_3) - \varphi(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)| \le k_0(|z_1 - \tilde{z}_1| + |z_2 - \tilde{z}_2| + |z_3 - \tilde{z}_3|)$$

при $|x-\bar{x}(t)|\le\alpha$, $|x_1-\bar{x}(t)|\le\alpha$, $|y-\bar{y}(s)|\le\alpha$, $|y_1-\bar{y}(s)|\le\alpha$, $|z_1-\bar{x}(t_0)|\le\alpha$, $|\tilde{z}_1-\bar{x}(t_0)|\le\alpha$, $|z_2-\bar{x}(t_1)|\le\alpha$, $|\tilde{z}_2-\bar{x}(t_1)|\le\alpha$, $|z_3-\bar{x}(T)|\le\alpha$, $|\tilde{z}_3-\bar{x}(T)|\le\alpha$.

Тогда $(\bar{x}(\cdot),\bar{y}(\cdot))$ минимизирует функционал $\Phi_\nu(x,y)$ на множестве D, где $\nu\ge L(\|A\|+2)\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)\left(1+e^{\chi(t_1)}+\chi(t_1)e^{\chi(t_1)}\right)$, $A-m\times n$ матрица,

$$D=\left\{(x,y)\in W:\|(x(\cdot),y(\cdot))-(\bar{x}(\cdot),\bar{y}(\cdot))\|_W<\frac{\alpha}{\beta}\right\},\qquad L=\int_{t_0}^{t_1}k_3(t)dt+\int_{t_2}^{T}k_4(t)dt+2k_0,$$

$$\beta>(\|A\|+2)e^{\chi(t_1)}(2+\chi(t_1))^2e^{m(T)}(2+m(T))^2,\quad \chi(t)=\int_{t_0}^{t}k_1(s)ds,\quad m(t)=\int_{t_2}^{t}k_2(s)ds.$$

Доказательство. Пусть $(x(\cdot),y(\cdot))$, $(x_1(\cdot),y_1(\cdot))\in D$. Тогда

$$|J(x,y)-J(x_1,y_1)|\le\int_{t_0}^{t_1}k_3(t)|x(t)-x_1(t)|dt+\int_{t_2}^{T}k_4(t)|y(t)-y_1(t)|dt+$$

$$+k_0|x(t_0)-x_1(t_0)|+k_0|x(t_1)-x_1(t_1)|+k_0|y(T)-y_1(T)|\le$$

$$\le\max_{t_0\le t\le t_1}|x(t)-x_1(t)|\int_{t_0}^{t_1}k_3(t)dt+\max_{t_2\le t\le T}|y(t)-y_1(t)|\int_{t_2}^{T}k_4(t)dt+k_0|x(t_0)-x_1(t_0)|+$$

$$+k_0|x(t_1)-x_1(t_1)|+k_0|y(T)-y_1(T)|\le\Big(\int_{t_0}^{t_1}k_3(t)dt+\int_{t_2}^{T}k_4(t)dt+$$

$$+2k_0\Big)\Big(\max_{t_0\le t\le t_1}|x(t)-x_1(t)|+\max_{t_2\le t\le T}|y(t)-y_1(t)|\Big)\le\Big(\int_{t_0}^{t_1}k_3(t)dt+$$

$$+\int_{t_2}^{T}k_4(t)dt+2k_0\Big)\|(x,y)-(x_1,y_1)\|_W.$$

Пусть существует $(\tilde{x},\tilde{y})\in D$, что $\Phi_\nu(\tilde{x},\tilde{y})<\Phi_\nu(\bar{x},\bar{y})$. Положив в лемме 9.1[5] $p(t)=\psi_1(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))$, $\delta=q(\tilde{x}(t_0))$ получим, что существует решение $x_0(\cdot)$ задачи $\dot{x}_0(t)\in a(t,x_0(t))$, $x_0(t_0)=x_0$ такое, что

$$\|x_0(\cdot)-\tilde{x}(\cdot)\|_{W_{1,1}^n}\le\left(1+e^{\chi(t_1)}+\chi(t_1)e^{\chi(t_1)}\right)\Big(q(\tilde{x}(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt\Big),$$

где $x_0\in M$ такой, что $q(\tilde{x}(t_0))=|\tilde{x}(t_0)-x_0|$. Положив в лемме 9.1[5] $p(t)=\psi_2(t,\tilde{y}(t),\dot{\tilde{y}}(t))$, $\delta=|A(x_0(t_1)-\tilde{x}(t_1))|$ получим, что существует решение $y_0(\cdot)$ задачи $\dot{y}_0(t)\in b(t,y_0(t))$, $y_0(t_2)=Ax_0(t_1)$ такое, что

$$\|y_0(\cdot)-\tilde{y}(\cdot)\|_{W_{1,1}^n}\le\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)\Big(|A(x_0(t_1)-\tilde{x}(t_1))|+\int_{t_2}^{T}\psi_2(t,\tilde{y}(t),\dot{\tilde{y}}(t))dt\Big)\le$$

$$\le \left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)\left(\|A\|\left(1+e^{\chi(t_1)}+\chi(t_1)e^{\chi(t_1)}\right)(q(\tilde x(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))dt+$$

$$+\int_{t_2}^{T}\psi_2(t,\tilde y(t),\dot{\tilde y}(t))dt)\le(\|A\|+1)\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)(1+e^{\chi(t_1)}+$$

$$+\chi(t_1)e^{\chi(t_1)})(q(\tilde x(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\psi_2(t,\tilde y(t),\dot{\tilde y}(t))dt).$$

Тогда получим, что

$$\|(x_0,y_0)-(\tilde x,\tilde y)\|_W\le(\|A\|+2)\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)(1+e^{\chi(t_1)}+$$

$$+\chi(t_1)e^{\chi(t_1)})(q(\tilde x(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\psi_2(t,\tilde y(t),\dot{\tilde y}(t))dt).$$

Получим, что

$$q(\tilde x(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\psi_2(t,\tilde y(t),\dot{\tilde y}(t))dt=q(\tilde x(t_0))-q(\overline x(t_0))+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}(\psi_1(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))-\psi_1(t,\overline x(t),\dot{\overline x}(t)))dt+\int_{t_2}^{T}(\psi_2(t,\tilde y(t),\dot{\tilde y}(t))-\psi_2(t,\overline y(t),\dot{\overline y}(t)))dt\le$$

$$\le(|\tilde x(t_0)-\overline x(t_0)|+\int_{t_0}^{t_1}(k_1(t)|\tilde x(t)-\overline x(t)|+|\dot{\tilde x}(t)-\dot{\overline x}(t)|)dt+$$

$$+\int_{t_2}^{T}(k_2(t)|\tilde y(t)-\overline y(t)|+|\dot{\tilde y}(t)-\dot{\overline y}(t)|)dt\le(1+\int_{t_0}^{t_1}k_1(t)dt+\int_{t_2}^{T}k_2(t)dt)\|(\tilde x,\tilde y)-(\overline x,\overline y)\|_W<$$

$$<(1+\int_{t_0}^{t_1}k_1(t)dt+\int_{t_2}^{T}k_2(t)dt)\frac{\alpha}{\beta}.$$

Отсюда вытекает, что

$$q(\tilde x(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\psi_2(t,\tilde y(t),\dot{\tilde y}(t))dt<(1+\int_{t_0}^{t_1}k_1(t)dt+\int_{t_2}^{T}k_2(t)dt)\frac{\alpha}{\beta}\ .$$

Поэтому

$$\|(x_0,y_0)-(\overline x,\overline y)\|_W\le(\|A\|+2)\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)\left(1+e^{\chi(t_1)}+\chi(t_1)e^{\chi(t_1)}\right)(q(\tilde x(t_0))+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\psi_2(t,\tilde y(t),\dot{\tilde y}(t))dt)+\|(\tilde x,\tilde y)-(\overline x,\overline y)\|_W\le$$

$$\le(\|A\|+2)\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)\left(1+e^{\chi(t_1)}+\chi(t_1)e^{\chi(t_1)}\right)(1+\chi(t_1)+m(T))\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}<\alpha.$$

Положим $\nu\ge L(\|A\|+2)\left(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)}\right)\left(1+e^{\chi(t_1)}+\chi(t_1)e^{\chi(t_1)}\right)$. Тогда

$$J(x_0,y_0)<J(\tilde x,\tilde y)+L\|(x_0,y_0)-(\tilde x,\tilde y)\|_W\le J(\tilde x,\tilde y)+\nu(q(\tilde x(t_0))+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))dt+\int_{t_2}^{T}\psi_2(t,\tilde y(t),\dot{\tilde y}(t))dt)=\Phi_\nu(\tilde x,\tilde y)<\Phi_\nu(\overline x,\overline y)=J(\overline x,\overline y).$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Пусть $\left|q(x_0)\right| < +\infty$. Если q липшицевая функция вблизи x_0, то положим (см.[2])

$$q^{[1]}(x_0; x) = \overline{\lim_{\substack{y \to x_0 \\ \lambda \downarrow 0}}} \frac{q(y + \lambda x) - q(y)}{\lambda},$$

$$\partial_c q(x_0) = \{x^* \in X^* : q^{[1]}(x_0; x) \geq \left\langle x^*, x \right\rangle \text{ при } x \in X\}.$$

Теорема 2. Если удовлетворяются условия леммы 2 и $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$ среди всех решений задачи (7) минимизирует функционал (6), то существуют функции $\overline{\upsilon}(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, t_1]$ и $\overline{u}(\cdot) \in W_{1,1}^m[t_2, T]$ такие, что

1) $(\dot{\overline{\upsilon}}(t), \overline{\upsilon}(t)) \in \partial_C(f(t, \overline{x}(t)) + \nu\psi_1(t, \overline{x}(t), \dot{\overline{x}}(t)))$ при $t \in [t_0, t_1]$,

2) $(\dot{\overline{u}}(t), \overline{u}(t)) \in \partial_C(g(t, \overline{y}(t)) + \nu\psi_2(t, \overline{y}(t), \dot{\overline{y}}(t)))$ при $t \in [t_2, T]$,

3) $(\overline{\upsilon}(t_0), -\overline{\upsilon}(t_1) + A^*\overline{u}(t_2), -\overline{u}(T)) \in \partial_C(\varphi(\overline{x}(t_0), \overline{x}(t_1), \overline{y}(T)) + \nu q(\overline{x}(t_0)))$,

где $\nu \geq L(\|A\| + 2)\left(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)}\right)\left(1 + e^{\chi(t_1)} + \chi(t_1)e^{\chi(t_1)}\right)$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $\Phi_\nu(\overline{x}, \overline{y}) \leq \Phi_\nu(x, y)$ при $(x, y) \in D$. Поэтому $\Phi_\nu^0(\overline{x}, \overline{y}; x, y) \geq 0$. Положив $\overline{f}(t, x, z) = f(t, x) + \nu\psi_1(t, x, z)$, $\overline{g}(t, y, v) = g(t, y) + \nu\psi_2(t, x, v)$ и $\overline{\varphi}(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \nu q(x)$, по лемме Фату (см.[9, с.97]) имеем

$$\Phi_\nu^{[1]}(\overline{x}, \overline{y}; x, y) \leq \int_{t_0}^{t_1} \overline{f}^{[1]}(t, \overline{x}(t), \dot{\overline{x}}(t); (x(t), \dot{x}(t)))dt + \int_{t_2}^{T} \overline{g}^{[1]}(t, \overline{y}(t), \dot{\overline{y}}(t); (y(t), \dot{y}(t)))dt +$$

$$+ \overline{\varphi}^{[1]}(\overline{x}(t_0), \overline{x}(t_1), \overline{y}(T); (x(t_0), x(t_1), y(T))) \equiv \overline{\Phi}_\nu(x, y).$$

Поэтому $(x(t), y(t)) = (0,0)$ минимизирует функционал $\overline{\Phi}_\nu(x, y)$ в W. Легко можно проверить, что для $\overline{\Phi}_\nu(x, y)$ также выполняются условия следствия 4[8]. Тогда из следствия 4[8] следует, что существуют функции $\overline{\upsilon}(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, t_1]$ и $\overline{u}(\cdot) \in W_{1,1}^m[t_2, T]$ такие, что выполняются соотношения 1)-3) теоремы 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 429 с.
2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука, 1988, 280 с.
3. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988, 359 с.

4. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264 с.
5. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку, Элм, 2002, 125 с.
6. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 359 p.
7. Садыгов М.А.Экстремальные задачи для включений в частных производных. Deutschland, LAMBERT Academic Publishing, 2015, 390 p.
8. Садыгов М.А. Необходимых и достаточных условиях для минимума в вариационной задаче, Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015,pp.119-135.
9. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, 400 с.

ON AN OPTIMIZATION PROBLEM FOR THE DIFERENTIAL INCLUSIONS OF VARIABLE STRUCTURE

M.A.Sadygov

Institute of Applied Mathematics BSU, Baku, Azerbaijan
e-mail: misreddin08@rambler.ru

ABSTRACT

In the paper is obtained necessary and sufficient conditions of a minimum for the differential inclusions is variable structure.

Keywords: multivalued mapping, diferential inclusions, normal integrand.

REFERENCES

1. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie. M.: Nauka, 1979, 429 s. (Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal control. M .: Nauka, 1979, 429 p.) (in Russian).
2. Klark F. Optimizatsiya i negladkiy analiz. M.:Nauka, 1988, 280 s (Clark F. Optimization and nonsmooth analysis. M.: Science, 1988, 280 p.) (in Russian).
3. Mordukhovich B.Sh. Metody approksimatsii v zadachakh optimizatsii i upravleniya. M.: Nauka, 1988, 359 s (Mordukhovich B.Sh. Approximation methods in optimization and control problems. M .: Nauka, 1988, 359 p.) (in Russian).
4. Oben J.P. Nelineyniy analiz i yeqo ekonomicheskiye prilojeniya. M .: Nauka, 1988, 264 s. (Auben J.P. Nonlinear analysis and its economic applications. M.: Mir, 1988, 264 p.) (in Russian).

5. Sadygov M.A. Issledovanie negladkikh optimizatsionnykh zadach. Baku, Elm, 2002, 125 s. (Sadigov M.A. The study of nonsmooth optimization problems. Baku, Elm, 2002, 125 p.) (in Russian).
6. Sadygov M.A. Subdifferentsial vysshego poryadka i optimizatsiya. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 359 p (Sadigov M.A. Higher order subdifferential and optimization. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 359 p.) (in Russian).
7. Sadygov M.A.Ekstremal'nye zadachi dlya vklyucheniy v chastnykh proizvodnykh. Deutschland, LAMBERT Academic Publishing, 2015, 390 p. (Sadigov M.A. Extreme tasks for inclusions in partial derivatives, Deutschland, LAMBERT Academic Publishing, 2015, 390 p.) (in Russian).
8. Sadygov M.A. Neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh dlya minimuma v variatsionnoy zadache, Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015,pp.119-135. (Sadigov M.A. Necessary and sufficient conditions for a minimum in a variational problem, Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015,pp.119-135.) (in Russian).
9. Federer G. Geometricheskaya teoriya mery. M.: Nauka, 1987, 760 s (Federer G. Geometric measure theory. M.: Nauka, 1987, 760 p.) (in Russian).
10. Ekland I., Temam R. Vypuklyy analiz i variatsionnye problemy. M.: Mir, 1979, 400 s. (Ekland I., Temam R. Convex analysis and variational problems. M.:Mir, 1979, 400 p.) (in Russian).